

数学的探究の時間

数学科 手嶋章博

1. はじめに

平成 30 年度告示の学習指導要領において、従来の「総合的な学習の時間」に替わって、「総合的な探究の時間」が設けられた。「学習」が「探究」に置き換わったが、そこにはどのような意図があるのだろうか。

近年のノーベル賞について見てみると、日本の強みは短期的な成果に直結しない基礎科学の分野であるという。一見何の役に立つかわからないが、面白そうだから研究してみよう、という分野だ。良く言えば、今の時点では有用性が分からなくても、将来的になんらかのアイデアと結びついて世の役に立つ可能性があるということだ。私にはこの基礎科学と「探究」が重なって感じられるのである。目先の利益にとらわれず、ただ「面白そう」だから研究してみる。そのような学問のスタイルがあってもよいのではないか。高校生のこのときに、受験とは関係なく、没頭して考えたり仲間と議論したり、そのような体験をさせたいと思うのである。ただそのような研究に高価な実験装置などを先行投資するほど経済的な余裕はない。そこで数学である。数学ならば紙と鉛筆だけで「探究」ができる。

ここでは、「総合的な探究の時間」の役に立つかどうかは分からないが、私がかつて没頭して考えたネタを「数学的探究」の一例として紹介したいと思う。

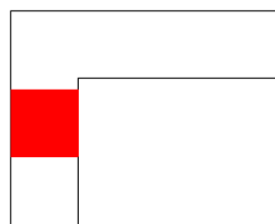
2. 事例集 I (図形編)

(1) 直角廊下

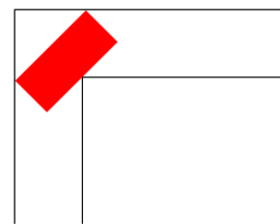
幅 1 m の L 字形の廊下 にソファー（でもなんでもいいのだが）を通したい。ソファーは立体的に立てたりしないものとするとき、その廊下を通ることのできるソファーの（上から見たときの）最大面積を求めよ。

(図 1) のように正方形であれば、角をスライドして通することができる。

これが長方形だったら (図 2) となり、今度は回転しないとイケない。長方形の 2 辺が $1/\sqrt{2}$ と $\sqrt{2}$ のとき最大となり、面積は (図 1) (図 2) とともに 1

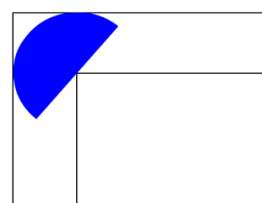


(図 1)



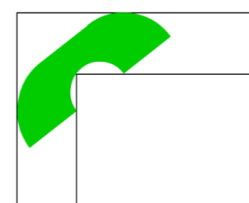
(図 2)

(図 3) のように、半円であれば面積は $\pi/2 = 1.57\cdots$ となり、かなり大きくなった。これが最大なのか？

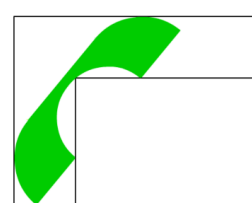


(図 3)

(図 4) (図 5) のように、半円を 2 つに分け、間の長方形を半円できり抜いた形 (受話器型) だと、面積を稼げる。四分円の離し方次第で面積が変わるが最大値は、 $\pi/2 + 2/\pi = 2.207\cdots$



(図 4)



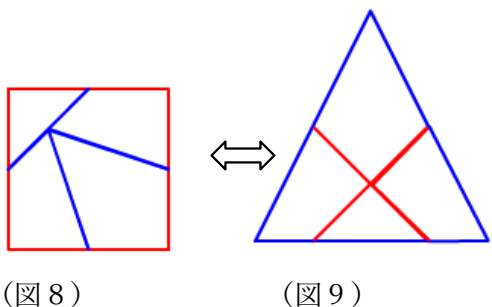
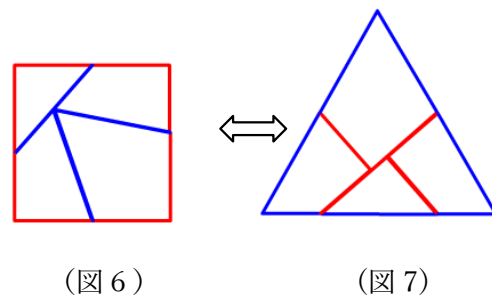
(図 5)

この結果が最大値だろうと思い、私のHP上 (<http://tessy.chobi.net/sofa.html>) に掲載したところ、なんと数研出版の教科書編集委員でもある明治大学の阿原一志先生から「現在のところの最大値は約 2.2195 ですよ」とご指摘をいただいた。もう絶版になったが「スチュアート教授のおもしろ数学入門」(日経サイエンス社) という本に記載がありますよ、と他の方からもご指南いただき、県立図書館で借りて見たところ、受話器の内側の角を削って外側を増やすことを丹念に検証した経緯が記されていた。また、よく考えてみると、これとは異なるアプローチによって更なる最大面積が存在する可能性もある。つまりこれは未解決問題であった。

生徒に散々考えさせた挙句、「未解決問題でした」という着地点にもどかしさが残るが、記録更新にチャレンジさせるのもよいかもしれない。私個人としてはアニメーションを作る苦労やインターネットを通じて大学の先生とやり取りをした経緯など、大変思い出深い題材である。

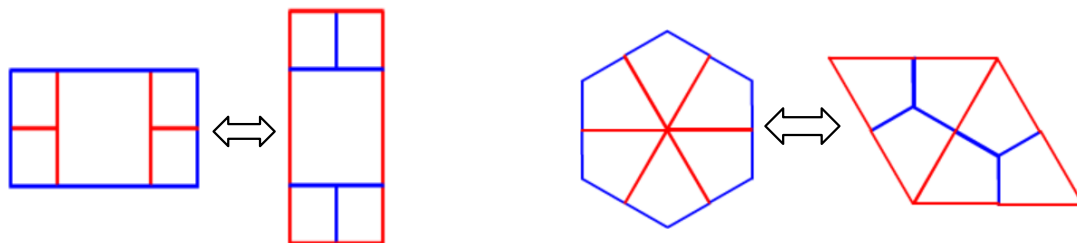
(2) (2) ハトメ返し

私が初めて「ハトメ返し」の概念に触れたのは 2000 年の第 54 回九数教大分大会で、数学者の秋山仁先生による模擬授業が行われた時である。そのときに右図のような不思議な図形が示された。正方形を(図6)のように切って4つのピースにし、端の1点を固定してクルリと並び替えると(図7)のような正三角形に変身した。秋山先生は「デュードニー分割」と表現していた。1900 年前後に活躍したイギリスのパズル作家デュードニーの著書「カンタベリー・パズル」の中で紹介されていたものらしい。これを見た私は(図6)の切れ目の入れ方をメモして、帰宅後に早速作ってみた。正方形が正三角形になるのだから、おそらく辺の midpoint で区切れればよいと思ったのだが、それでできたのが(図8)(図9)である。これは二等辺三角形であり切れ目も十字になっていて、失敗作である。



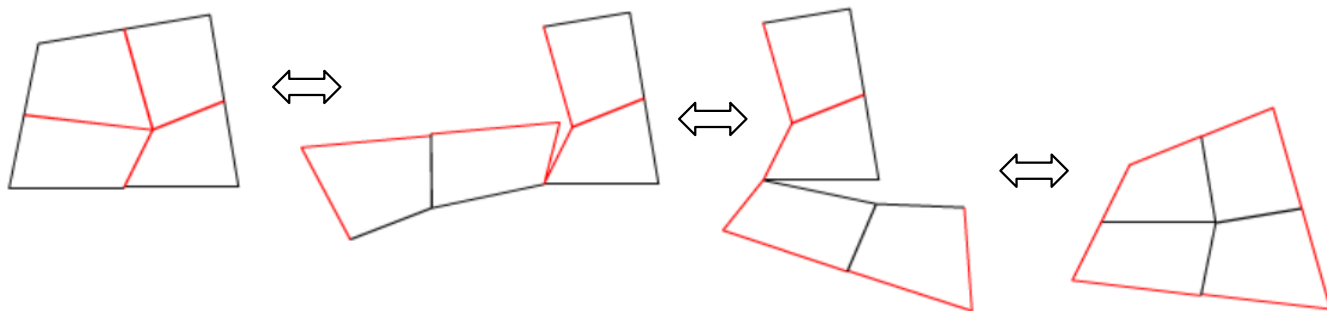
そのような試行錯誤を経た後、きちんと計算をして正三角形になる分割を見つけたが、これ以降生徒たちにはこの分割の仕方を自由課題として提示してきた。

さらに調べていくと、ベルトの穴やタグ穴を補強する金具を「鳩目 (ハトメ)」というらしいが、そのハトメで一端を留めてクルリと並び替える変形を「ハトメ返し」というそうである。以下にその例を 2 つだけ並べる。(<http://tessy.chobi.net/hatome.html> にアニメーションを掲載しています。)



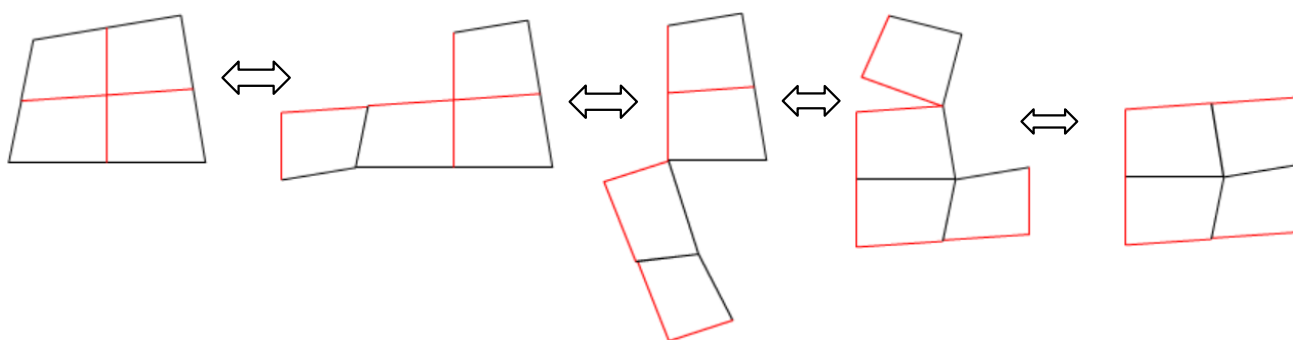
2007 年のある日、渡辺学先生 (現大分支援学校教頭) から次の題材を教えていただいた。

任意の凸四角形の内部に 1 点を取り、その点と各辺の midpoint を結んで 4 つの四角形に分割する。これをハトメ返しにすると新たな四角形ができるが、新たな四角形が平行四辺形になるようにするには、凸四角形内のどこに点をとればよいか。



言葉で説明しても分かりにくい、図で説明しても分かりにくい。こんな時にアニメーションでご覧いただけると一目瞭然なので、こちら (<http://tessy.chobi.net/hatome2.html>) と合わせて見ていただければと思う。上図では平行四辺形にはなっていないが、四角形内部のどこに点をとっても必ず四角形が別の四角形に変身する。これは平面の敷き詰め問題につながり、四角形は必ず単体で平面を敷き詰めるというところに帰着する。

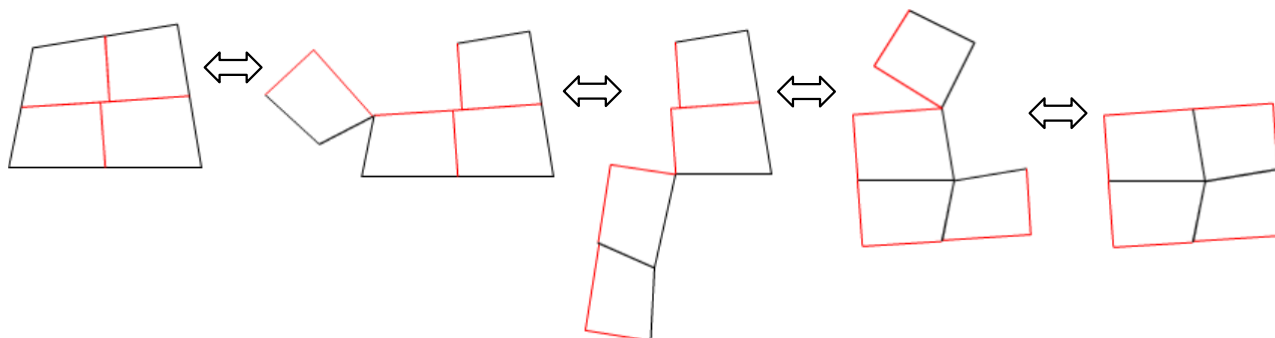
平行四辺形になるためには対角が等しくなればよいので、単純に向かい合った中点同士を結べばよい。



今回の問題を少し拡張して

四角形の各辺の中点を通る線分で四角形を4分割して**長方形**にするハトメ返しを作れ

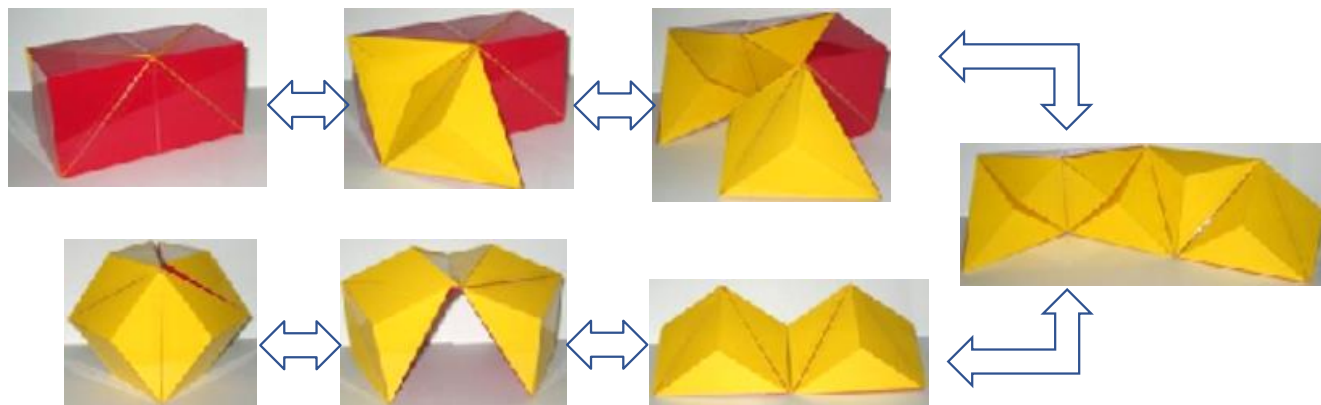
という問題だったらどうだろうか。



さらに、菱形にするには？三角形にはできないのか？元の図形が三角形だったら？など、一つの問題に対して新たな疑問が次々に思い起こされる。生徒たち自身からこのような疑問が沸き起こり、考えさせたり議論させたりすることこそ「探究」ではないかと思う。2017～2018年度のOSS（大分スーパーサイエンスコンソーシアム）の中で舞鶴・豊府・上野丘から2名ずつ集まってこの平面のハトメ返しと次に紹介する立体ハトメ返しについて探究活動を行ったが、限られた時間の中で生徒たちは生き生きと楽しみながら、非常に有意義な活動ができたと思う。

(3) 立体ハトメ返し

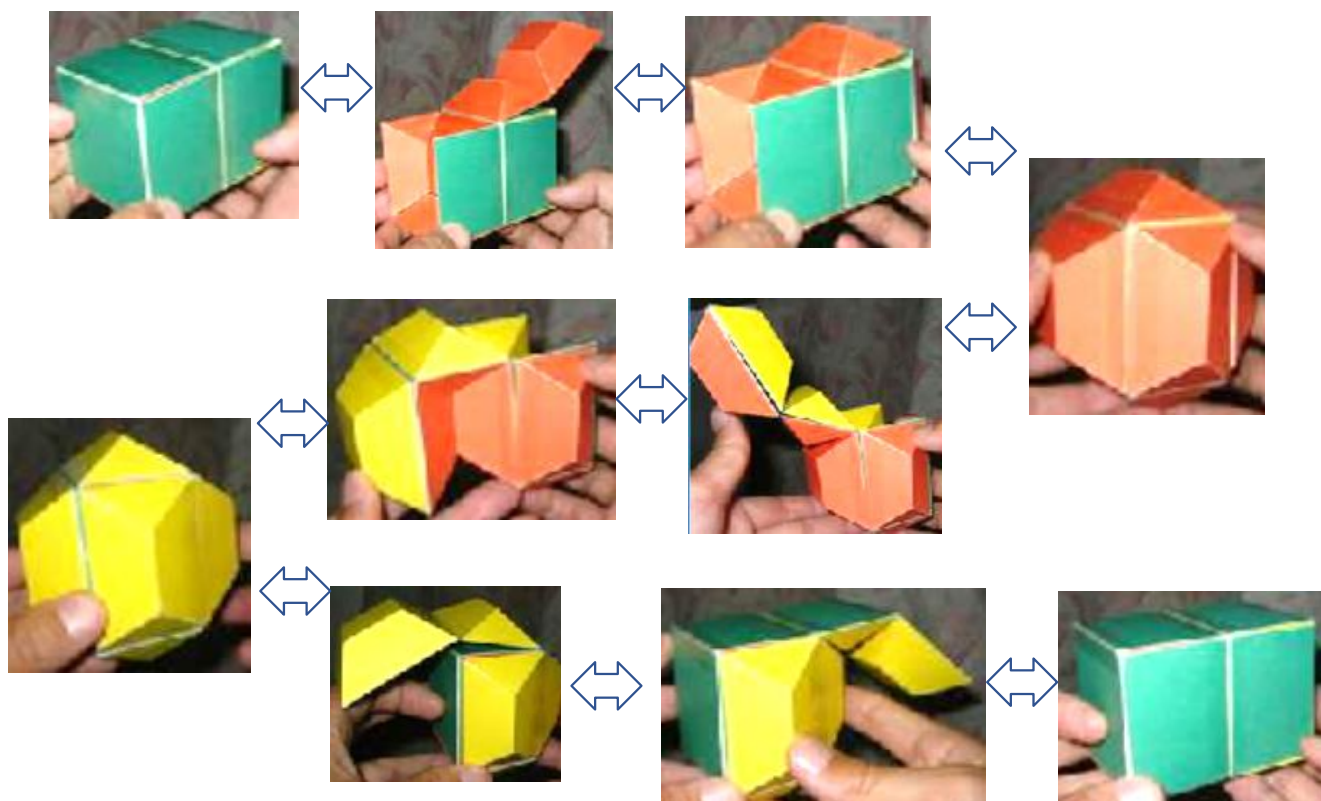
2004 年の夏、九数教鹿児島大会が開催された。私はその翌年の九数教の分科会で研究発表をすることになっていたため、どのようなことを発表すればよいのか偵察に行っていた。その全体会で講演をされたのがまたしても秋山仁先生であった。どのような講演が聴けるのか、ワクワクして聴かせていただいたのだが、私の想像を遥かに超える内容であった。なんとハトメ返しの概念を 3 次元に拡張し、いわゆる「立体ハトメ返し」を披露してくれたのだ。直方体をうまく分割して辺でつなげ、クルリと回転させると菱形十二面体になる。私はその切れ目をメモして、帰宅後に段ボールで作ってみた。何度も失敗を重ねつつ、ようやく作成できたのが下の写真である。これはアクリル板で作成している。



これは立方体を 2 個つなげた直方体が菱形十二面体に変身する。平面のハトメ返しと同様に、内側の面と外の面が完全に入れ替わり、互いの立体の内部には隙間がない。菱形十二面体の体積を求めるのは大変であるが、直方体の体積ならば求めやすい。

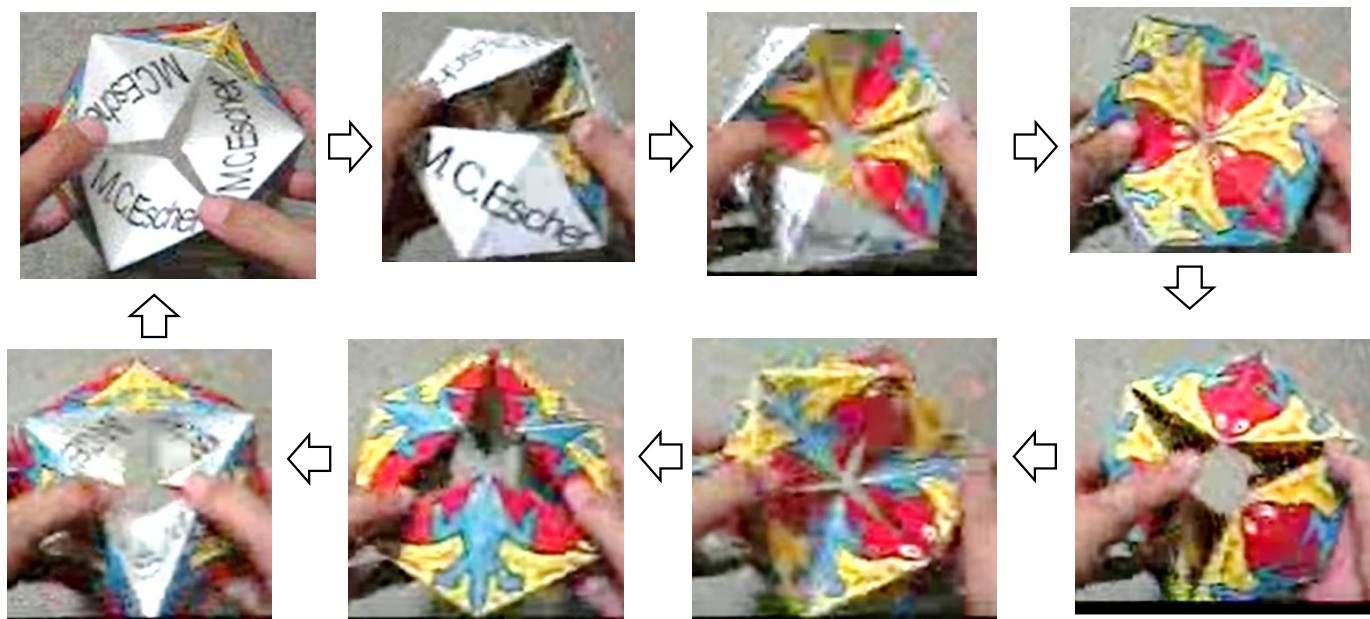
以下にもうひとつだけ立体ハトメ返しを自作したものを掲載する。白黒なので分かりにくいのだが、緑色の直方体がオレンジの切頂八面体になり、さらに黄色の切頂八面体に変身する。

(<http://tessy.chobi.net/3dhatome.html>)



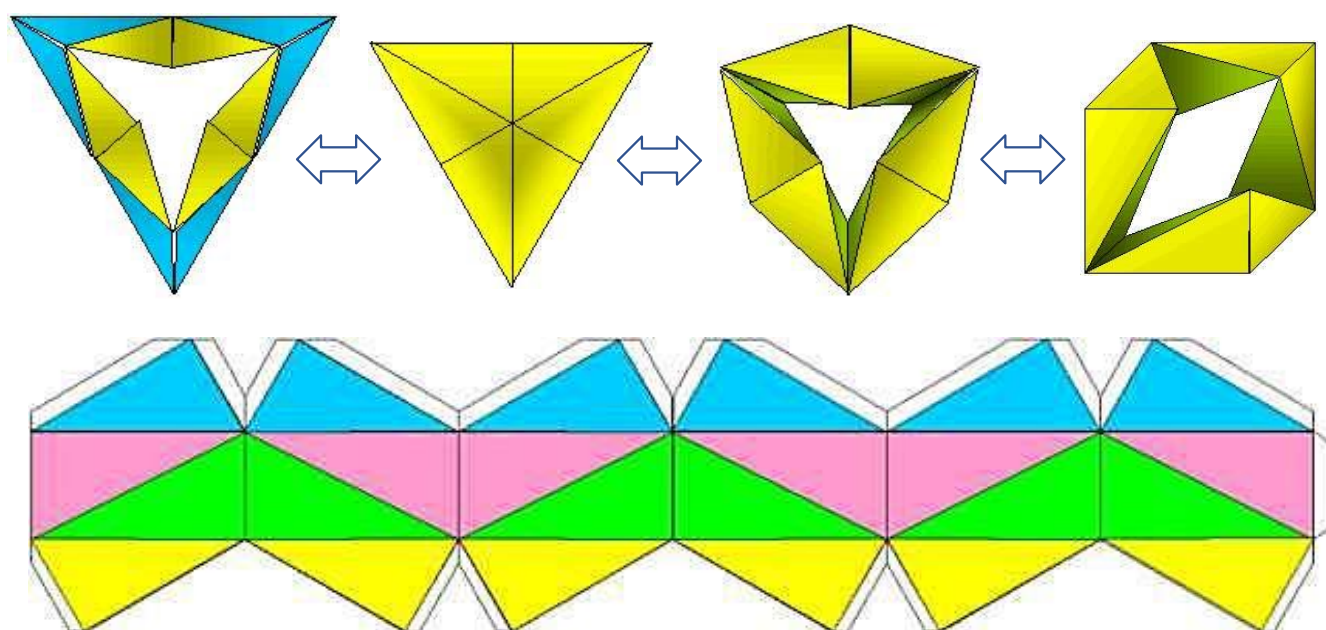
(4) カライドサイクル

動きのある多面体に興味を持った私は、さらなるおもしろ立体を探してインターネット上をウロウロしていると、「カライドサイクル」という物体に出会った。これは四面体をいくつか辺でつなげてリング状にしたものらしい。



上の写真は四面体6個をつなげたカライドサイクルである。「M.C.エッシャー カライドサイクル」というクラフト本を使わせてもらった。図柄が無限に回転していく様はまるで万華鏡のようである。エッシャーの図柄はひとまず置いておくことにして、この立体は $2:\sqrt{5}:\sqrt{5}$ の三角形4面からなる四面体6個からできている。この比率のときにギリギリ穴が塞がる。もっと細長い四面体だったり、10個も20個もつなげたりすればクルクル回ると言っても当たり前の感じでつまらない。

ところがもう少し調べてみると、細長い四面体6個をつないだカライドサイクルのうち、おもしろい動きをするものがあった。「invertible cube」というものらしく、1928年に Paul Schatz によって考案されたらしい。



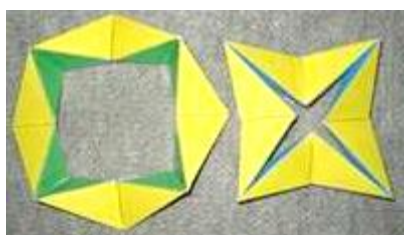
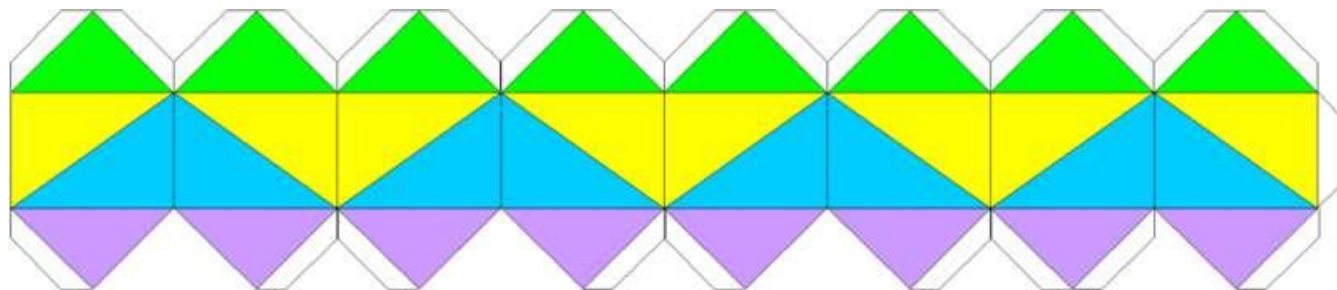
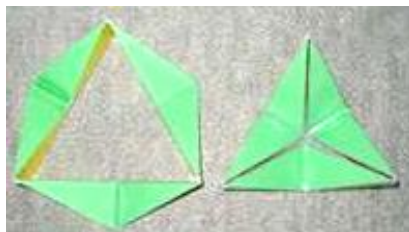
これを厚紙で作って、クルクル回して遊んでいるうちに、正三角形の穴が空くときと正三角形そのものになるときがあることに気付いた。これと同じ大きさのものをもう1個作ったら、合体できるのでは

ないかと思い、実際に作ってみた。

合体してみるときれいに収まって、そうなる
と「このままクルクル回るんじゃないか？」と誰もが
が感じると思うのだが、実際やってみると合体
したままクルクル回る。これは新しいタイプの
カライドサイクルができたぞ、と興奮したのだ
が、そうやって遊んでいるとまたまた閃いた。2
つを重ねたまま回す途中でまたもや正三角形の
穴が空いたのだ。今度は厚みが2つつあるので、
さらに2個追加で作って(作りながらワクワクし
ていたのだが)、計4個を合体させるとうまくハ
マって、なんとこれがこのままクルクルと回るの
だ。このときの私の興奮度はMAXだったのだが、
冷静によく見ると、これは一番最初に作った四面体6個の
カライドサイクルそのものであった。「ああ、
なるほど！」と納得するとともに、「もしかして大発見??」という興奮はスーッと冷めていった。

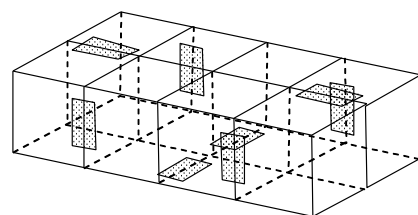
とは言え、恐らく Paul Schatz はこの逆の手順で invertible cube を考案したのではないかと、先人の
思考をトレースできたような気がして、非常に嬉しかった。つまり、6連結のカライドサイクルを合同
に4分割したものが invertible cube ということであった。

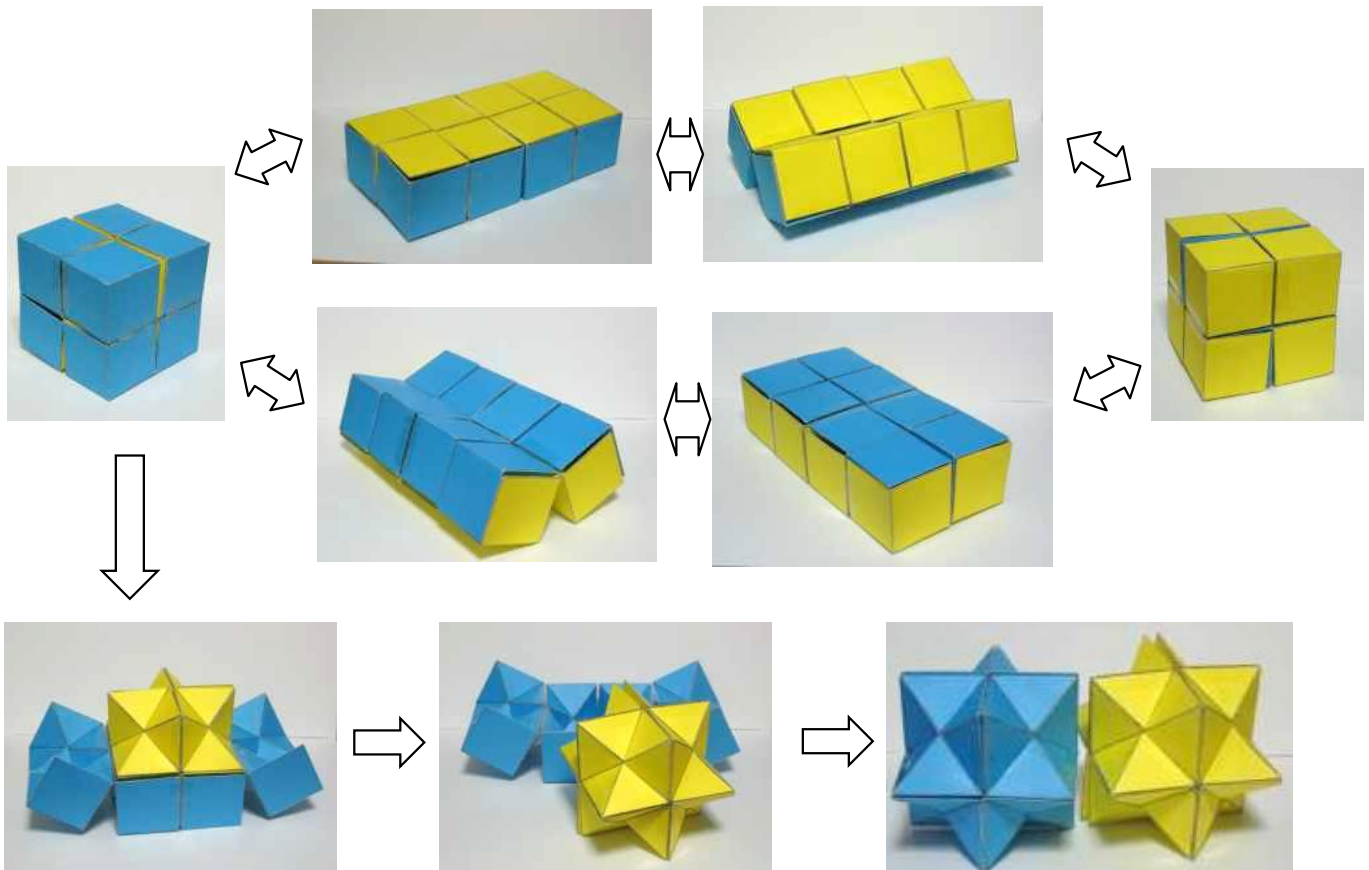
とすると、8連結のカライドサイクルも合同に4分割できるのではないか。こう考えた私は、早速展開
図を描いて、新しいタイプの invertible cube を作ってみた。それが下の写真。



(5) 吉本キューブ・トムキューブ

おもしろ立体を探しているときに、実は「カライドサイクル」より
も先に「吉本キューブ」と「トムキューブ」の方が目に留まった。「吉
本キューブ」は1970年代に吉本直貴氏が考案した幾何学オブジェで
ある。立方体8個を辺で右図のようにうまく連結すると無限に立方体
と直方体を繰り返す面白い立体ができる。これだけでも面白いのだが、
吉本キューブの場合さらに2つの立体に分かれ、それぞれが星形の多面体に変身する。これは作って
みたいと思い、展開図を描いて同形のパーツを16個作り、大変苦労して作成した。





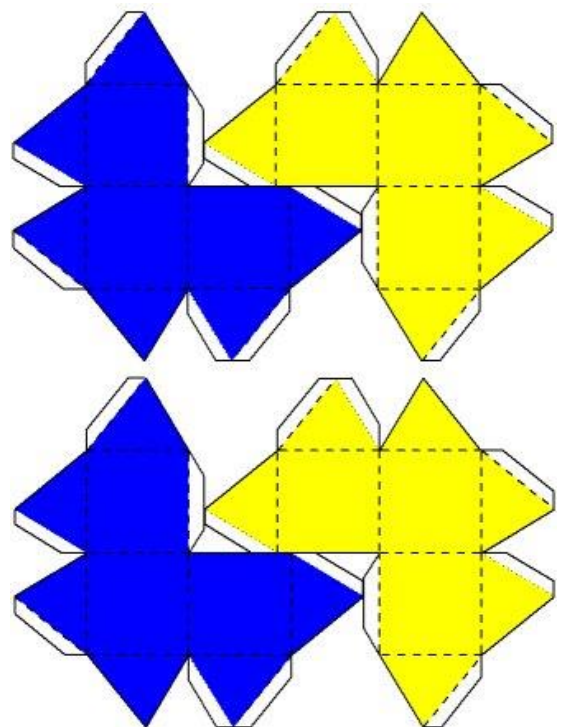
当初の展開図は正確に描いたのだが、吉本キューブの特性上、外側の物が内側に包まれ、内側の物が外側になる構造のため、紙の厚みの関係でうまく収まらない。そこで少しズルをして作ったのが右の展開図である。本来なら三角形の部分は二等辺三角形なのだが、内側の見えない部分に余裕（隙間）ができるように歪めている。

理論上は隙間なく変形することを考えれば、この吉本キューブは立体ハトメ返しと同様に空間を充填する立体である。星形でデコボコしている立体も同じものをたくさん作れば空間を隙間なく埋め尽くす立体であることが分かる。

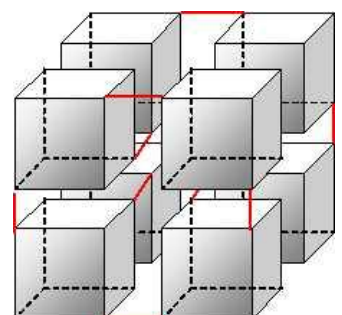
一方、「トムキューブ」は 1970 年に戸村浩氏が考案した。吉本キューブと同様に 8 個の立方体で 1 個の大きな立方体を作るのだが、吉本キューブは辺でつなげていたのに対し、トムキューブは頂点でつなげる。下の 4 つの立方体を持って上下に素早く動かすと上の 4 つの立方体がクルリと反転して上面の絵柄が変わる。もう一度同じことをすると元に戻る。

また、対角にある 2 つの立方体を両手で持って上下にリズムよく離したり戻したりするとクルクルと回転するような動きをする。紙面では説明が難しいので HP (<http://tessy.chobi.net/tomcube.html>) をご覧ください。

吉本キューブに比べてこちらの方が作るのは簡単で、ただ立方体 8 個を右図のように糸でつなげばよい。



tessy



(6) 正四面体と正八面体

正八面体の体積は、同じ辺の長さの正四面体の体積の何倍か？

この問題はすでに考えたことがある方も多いと思う。1 辺の長さを 1 としてそれぞれの体積を計算すればよい。別の方法として、正四面体と正八面体の関係性を知っていれば、暗算レベルの計算で解くことができる。その関係性とは、正四面体 4 個と正八面体 1 個で相似比 2 倍の正四面体を作ることができることだ。隙間ができないことは、正四面体の 2 面のなす角の余弦が $1/3$ であり、正八面体の隣り合う 2 面のなす角の余弦が $-1/3$ であることから示すことができる。この関係性を知っていれば、小さな正四面体の体積を 1 としたときに、相似比 2 倍の正四面体の体積は $2^3 = 8$ となるので、それから正四面体 4 個を取り除けば、正八面体の体積は 4 となる。つまり 4 倍が正解だ。

これをここまで文章で読んだ方は非常に解りにくかったと思うが、実際に立体を作って並べてみると一目瞭然である（下の写真では解りにくいかもしれないが）。



これは、正四面体と正八面体を組み合わせれば空間を隙間なく充填することを示している。これを説明するためにもっとたくさん正四面体と正八面体を作って、積み上げてみたのが右の写真である。ここで新たな問題。



右写真の 4 段の正四面体の中に、小さい正四面体と正八面体はそれぞれ何個あるか？

意外と正解できない問題である。正解は正四面体 24 個、正八面体 10 個である。正八面体はわかりやすいのだが、正四面体を 20 個と答える間違いが多い。これは月見団子のように積み上げるのであれば確かに 20 個なのだが、今回の場合は逆さ向きに突き刺さっている正四面体が 4 個あるのだ。2 段区切りで考えると、中くらいの大きさの正四面体 4 個と正八面体 1 個に分けられる。正四面体には 4 個の小さい正四面体と 1 個の正八面体が含まれているから、中くらいの正四面体にはトータル 16 個の小さい正四面体と 4 個の正八面体が含まれている。問題は中くらいの正八面体に何個の小正四面体と小正八面体が含まれているかであるが、これも作ってみれば一目瞭然だ（右の写真）。



同様に n 段の正四面体の中に、小さい正四面体と正八面体はそれぞれ何個あるか？

という問題になると、一気に難しくなる。2008 年の東工大入試で出題されているようだ。

正解は正四面体が $\frac{1}{3}n(n^2 + 2)$ 個、正八面体が $\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)$ 個である。

3. 事例集Ⅱ（数論編）

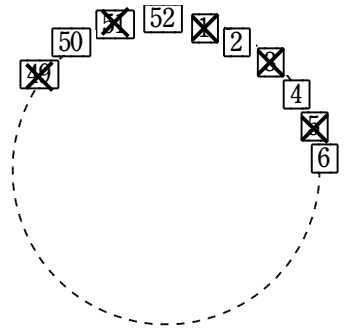
(1) ヨセフスの問題（継子立て）

トランプ 52 枚を揃えて手に持つ。そのカードの一番上の 1 枚を捨てて次の 1 枚を残りのカードの一番下にもってくる、という作業を繰り返す。このとき、最後まで残っているのは最初の並びの上から何番目のカードか？

これは「ヨセフスの問題」とか「継子立て（ままこだて）」と呼ばれる問題である。右図のようにトランプを円形に並べて、1 枚おきに捨てていくということと同じだ。

この問題を本校 1 年生の授業で考えさせたことがある。ちょうど数学 A の「整数の性質」を学習していたときである。4～5 人の班に分け、あらかじめ準備しておいた 1～16 を書いた紙片を班に一組ずつ渡し、試行錯誤させながら、「では 52 枚ならどうか？」と聞いた。少ない枚数で実験して予想を立てる班、残り 36 枚の紙片を作って実験を試みる班、私に「20 枚だったら？」「30 枚だったら？」と質問してくる班など、反応は様々だ。不公平になると悪いので、質問は 1 班 1 回限りにして、「20 枚なら 8」「30 枚なら 28」と即答すると、それくらいの暗算で出せるコツがあるのだなと気づき、いち早くそのコツを掴みたい、と結構盛り上がって学習できた。

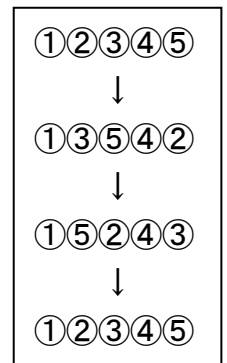
生徒たちに実験をさせて試行錯誤の中である性質に気付かせるという題材として、これは難易度的に適切な問題だと思う。



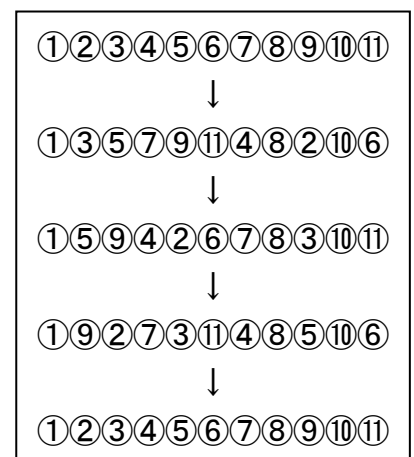
(2) シャッフルの周期

① 継子立てシャッフル

「ヨセフスの問題」をトランプで実際に行った時に、最後のカードも捨てると、捨てたカードでできた山はシャッフルされた状態で最初の状態とは異なる新たな並びになっている。これを「継子立てシャッフル」と呼ぶことにする。このシャッフルを規則正しく何度か行えばいずれは最初の状態に戻るのではないか。例えば 5 枚で行えば右図のように 3 回のシャッフルで元に戻る。これを周期 3 ということにすると 52 枚のトランプなら何回のシャッフルで初期状態に戻るのか？一瞬、実験してみようと思ったのだが、これは現実的ではない。1 回のシャッフルに時間がかかりすぎる。そこでとりあえず少ない枚数で実験することにした。すると意外な事実が発覚する。例えば 10 枚の周期は 9 なのだが、11 枚だと周期はたったの 4 である。12 枚なら周期は 28 となり、ここまで予測不能な感じである。



手作業で調べるには限界があると思い、こういうときこそコンピューターの力を借りようということで、C 言語でコードを書いて調べてみた。私はコンピューターの力を借りることを「邪道だ」とかズルいとは思わない。昔、まだプログラミングができなかったときは「邪道だ」と思っていたが、少しできるようになると手のひらを返したように「これは便利！みんな使うべき！」と思ってしまう。



52 枚だと周
期は 644 であ
る。こうやっ
て並べてみる
と、手作業で
実験するのは
現実的ではな
い。で、この

何枚までの周期を表示しますか？100									
1	1	2	2	3	5	6	6	4	9
4	28	10	9	14	12	5	70	18	24
10	7	210	126	110	60	26	120	9	29
30	60	6	33	308	42	60	990	30	374
27	41	60	2618	840	840	420	1386	24	15
50	644	840	53	18	1386	14	13300	2520	1260
55	6930	50	60	7	65	27720	203490	34	69
2898	1050	14	220	74	2520	60060	792	26	16926
1260	81	360360	1692	78	9	86	62930	29	89
90	6630	18	31920	27720	2214	48	2520	98	270

規則性については私自身何もわかっていないのが現状である。

さらに、これを H P (<http://tessy.chobi.net/shuffle.html>) にアップすると、手品ショップの方から「これはフェイスアップの状態でカードを捨てるということですよ」とご指摘をいただいた。普通、カードを捨てるときにわざわざひっくり返して捨てないのに、このシャッフルではそうしている、というご指摘だ。それはごもっともな話だと思ったので、フェイスダウン（つまり普通の捨て方）でのシャッフルの周期も調べてみた。前者を正順、後者を逆順としている。

枚数	周期	
	正順	逆順
1	1	1
2	1	2
3	2	3
4	2	2
5	3	5
6	5	6
7	6	5
8	6	4
9	4	6
10	9	6
11	4	15
12	28	12
13	10	12
14	9	30
15	14	15
16	12	4
17	5	17
18	70	18
19	18	10
20	24	20
21	10	21
22	7	14
23	210	24
24	126	90
25	110	63

枚数	周期	
	正順	逆順
26	60	26
27	26	27
28	120	18
29	9	66
30	29	12
31	30	210
32	60	12
33	6	33
34	33	90
35	308	35
36	42	30
37	60	110
38	990	120
39	30	120
40	374	26
41	27	41
42	41	42
43	60	105
44	2618	30
45	840	45
46	840	30
47	420	60
48	1386	48
49	24	120
50	15	50

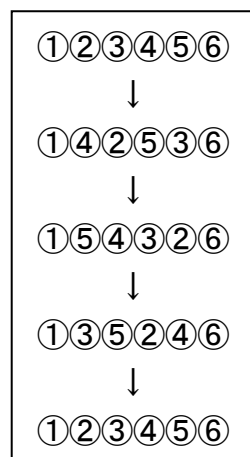
枚数	周期	
	正順	逆順
51	50	42
52	644	510
53	840	53
54	53	1680
55	18	120
56	1386	1584
57	14	57
58	13300	336
59	2520	276
60	1260	60
61	55	2665
62	6930	720
63	50	8415
64	60	12
65	7	720
66	65	66
67	27720	120
68	203490	68
69	34	840
70	69	336
71	2898	4347
72	1050	210
73	14	286
74	220	870
75	74	66

枚数	周期	
	正順	逆順
76	2520	50
77	60060	621
78	792	78
79	26	24
80	16926	210
81	1260	9690
82	81	55440
83	360360	3465
84	1692	1122
85	78	5040
86	9	370
87	86	87
88	62930	720
89	29	630
90	89	90
91	90	783
92	6630	92
93	18	78
94	31920	50
95	27720	95
96	2214	96
97	48	6435
98	2520	132
99	98	780
100	270	120

② パーフェクトシャッフル

継子立てシャッフルの周期についてはとりあえず棚上げにして（現在も棚上げ進行中）、別のシャッフルだったら周期はどうなるか気になってきた。よくマジシャンがやる、2山に分けてパラパラと交互に噛み合わせていくシャッフルだったらどうか。これを全て1枚ずつ、完全に規則正しくシャッフルを繰り返せば（パーフェクトシャッフルというらしい）、いつかは最初の並びに戻るはずだ。

最初は数枚のカードで実験をしてみた。6枚だと4回で元に戻る（周期4）。ところが8枚だと周期3に減る。これも一筋縄にいかないようなので、コンピュータで調べた。



カード枚数	周期	カード枚数	周期	カード枚数	周期	カード枚数	周期
1	—	26	20	51	8	76	20
2	1	27	18	52	8	77	30
3	2	28	18	53	52	78	30
4	2	29	28	54	52	79	39
5	4	30	28	55	20	80	39
6	4	31	5	56	20	81	54
7	3	32	5	57	18	82	54
8	3	33	10	58	18	83	82
9	6	34	10	59	58	84	82
10	6	35	12	60	58	85	8
11	10	36	12	61	60	86	8
12	10	37	36	62	60	87	28
13	12	38	36	63	6	88	28
14	12	39	12	64	6	89	11
15	4	40	12	65	12	90	11
16	4	41	20	66	12	91	12
17	8	42	20	67	66	92	12
18	8	43	14	68	66	93	10
19	18	44	14	69	22	94	10
20	18	45	12	70	22	95	36
21	6	46	12	71	35	96	36
22	6	47	23	72	35	97	48
23	11	48	23	73	9	98	48
24	11	49	21	74	9	99	30
25	20	50	21	75	20	100	30

これは解決している問題で、2002 年度の東大入試で出題された。表のように奇数枚のときはそれより 1 枚多い偶数枚のときと同じ周期になる。実験してみればわかるが、一番最後のカードは動かない。何回パーフェクトシャッフルをしようが、ずっと最後のままである。だから偶数枚のカードの一番最後がなくなったとしてもシャッフルは変わらない。

これで驚きなのは、52 枚の場合、たったの 8 回で元の並びに戻るということだ。これはマジシャンの世界では常識らしく、実際にこの性質を使ったマジックがある。YouTube で「unshuffled」で検索するとたくさん見ることができる。

(3) N I M ・ スプラウト

① N I M

碁石でも何でもいいのだが、3 個、5 個、7 個の山に分け、2 人で交互に取って行って最後を取った人が負け、というゲーム。ただし、1 度に 1 つの山からは何個でも取ってよいが 2 つの山から同時に取ることはできない。

私が初めてこのゲームを知ったのは中学生のときで、当時はこのゲームが N I M という名前であることは知らなかったが、とにかく負けるのが嫌だったから必勝パターンをシラミツブシに覚えて先手だったら必ず勝てるようになった。その後、大学に入ってから N I M という名前と 2 進法による必勝法を知り、心底「スゴイ！」と感心したのだった。

(3, 5, 7) の場合、これを 2 進法で表すと (11,101,111) であり、繰り上がりを考えずに各桁の和をとると 223 となる (排他的論理和だと 001)。この各桁がすべて偶数になるように取ればよい。

これを生徒たちに気付かせるのは無理だろうが、2 人で対戦しながら、あーでもない、こーでもない必勝法を探る過程が、まさに探究活動だと思う。

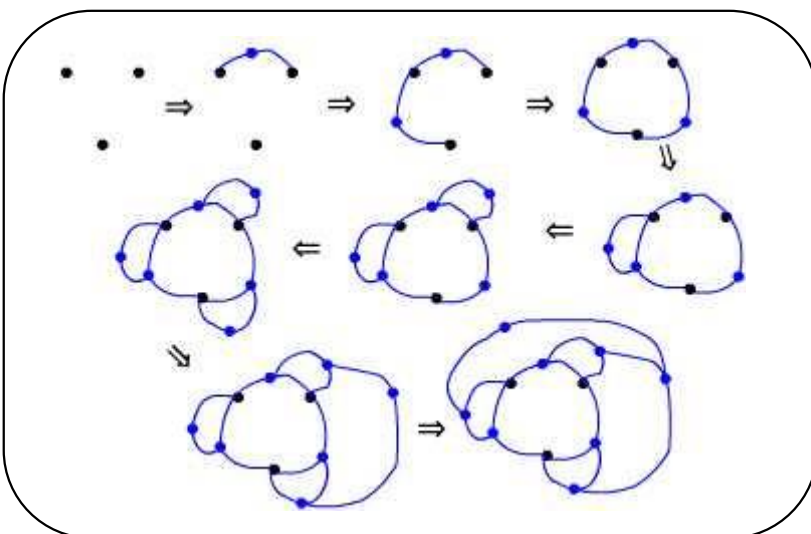
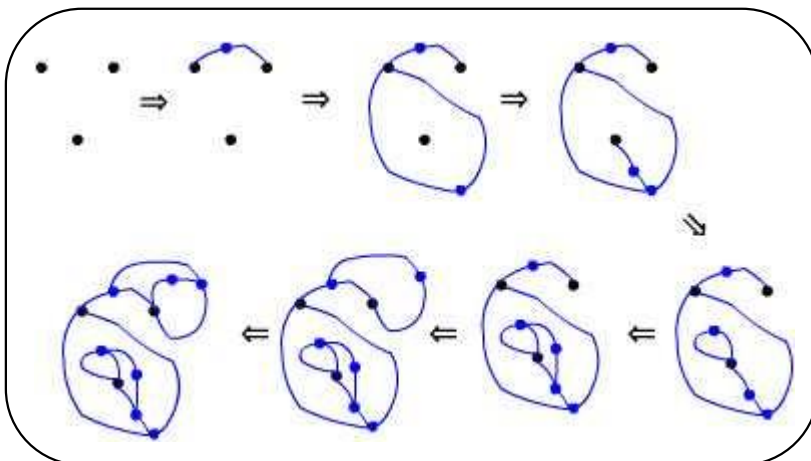
② スプラウト

1. 紙と鉛筆を使って2人で遊ぶゲーム。
2. 紙に点をいくつか（3～5個くらいが適当）書く。
3. 先手の人が点から点を線で結び（点から自分自身に戻ってきてもよい）、その線上に点の一つ書き加える。
4. 後手の人も同様に線を引き、点を打つ。その際、線が交差してはいけない。
5. 一つの点から出ていく線は3つまで。よって、新たに打たれた点はあと一本しか線を引きすることができない（もともと線上にあるので）。
6. 先にその操作が出来なくなった人が負け。

例えば3つの点から始めて、右上図のような手順なら先手が勝ち。同じ3つの点でも右下図の手順なら後手が勝ちになる。

イギリスの数学者であるジョン・コンウェイとその学生が雑談しながらこのゲーム（スプラウト）を作ったらしい。これもルールが簡単だし、紙と鉛筆さえあればどこでもできるので、必勝法を探るのは面白い試みである。だがこれはNIMと違い、必勝法がまだ見つかっていない（と思う）。

これと似ているがブリュッセル・スプラウトというゲームは点の代わりに+（十字）を用い、一つの+からは4本の線を出すことができるというルールだ。ところが、これは必勝法が存在する（ n 個の+から始めたとき、 $5n-2$ 手で終わる）。ルールが少し違うだけで必勝法が未解決なものとは簡単にものに分かれるあたり、大変興味深い。



4. おわりに

以上の内容のほとんどは、拙HP「しごと・あそびごと・ひとりごと」(<http://tessy.chobi.net/>)に掲載しています。アニメーションや動画を見たい方はぜひご覧になってください。

また、生徒の「探究」活動の成否は、私たち教員自身に探究する姿勢があるかどうかにかかっていると思っています。まずは私たち自身が数学を面白がって探究し、その姿を生徒たちに見せることが「数学的探究」の第一歩です。本稿がその一助になればとても嬉しく思います。